<u>**АЛГЕБАРСКИ ИЗРАЗИ**</u>

У алгебри је врло важно да се зна да се операција "одузимање" може схватити као "сабирање позитивног негативног броја" односно да је:

$$\boxed{A-B=A+(-B)}$$

Такође се и операција "дељење" може схватити као "множење реципрочном вредношћу" односно да је:

$$\boxed{A:B=A\cdot\left(\frac{1}{B}\right)}$$

Имајући ово у виду, можемо набројати важне законе за операције <u>сабирање</u> и <u>множење</u> који се преносе на "одузимање" и "дељење" ако се ове операције схвате као у претходном разматрању.

$$\left.\begin{array}{l}\boxed{A+B=B+A}\\ \boxed{A\cdot B=B\cdot A}\end{array}\right\}\rightarrow \textit{(закон комутације)}$$

$$\left.\begin{array}{l}\boxed{(A+B)+C=A+(B+C)}\\ \boxed{(A\cdot B)\cdot C=A\cdot(B\cdot C)}\end{array}\right\}\rightarrow \textit{(закон асоцијације)}$$

$$\left.\begin{array}{l}\boxed{A\cdot(B+C)=A\cdot B+A\cdot C}\\ \boxed{(A+B)\cdot C=A\cdot C+B\cdot C}\end{array}\right\}\rightarrow \textit{(закон дистрибуције)}$$

Алгебарски изрази су сачињени од <u>**константи**</u>**:**

на пример: $2;\ (-3);\ 2\frac{3}{5}\ ;1\ ;(-\sqrt{2})\ ;\frac{\sqrt{3}}{4}\ ;\frac{3}{8}\ ;\ (-1);\ 3,25;\ 0,8;\ \ldots$

и од <u>**променљивих**</u>**:**

на пример: $a;\ b;\ c;\ d;\ \ldots\ x;\ y;\ z;\ \ldots$ или $a^3;\ b^2;\ c^{18};\ \ldots x^4;\ y^5;\ z^2;\ \ldots$

МОНОМИ

Дефиниција (1)
Производ константе (коефицијента) и неких промењљивих, евентуално, назива се **МОНОМ**.

Пример:

Узмимо на пример **моном**:

$$\underset{\substack{\downarrow \\ \text{коефицијент}}}{\frac{2}{3}} \cdot \underbrace{a^3 \cdot b \cdot x^5 \cdot y^2}_{\text{промењљиве}}$$

Уобичајено је да се не пише "тачка" која представља операцију множење, тако да се претходни **моном** може писати: $\boxed{\frac{2}{3}a^3bx^5y^2}$

Узмимо још неколико примера **монома**:

$$2a^2b; \quad -3ax^4y^2; \quad x^5y; \quad a; \quad -b; \quad \sqrt{3}a^2b^6x; \quad -2; \quad 3\frac{4}{5}; \ \ldots$$

Ако пажљиво читамо **Дефиницују (1)** уочићемо да моном мора да садржи коефицијент а да промењљиве и не мора да садржи. То се види у претходним примерима, међутим, рекло би се да **мономи** као што су:

$$x^5y; \quad a; \quad -b;$$

немају коефицијент, али у тим случајевима се подразумева да је коефицијент 1 или (-1). Дакле:

$$\boxed{x^5y} \equiv \boxed{1x^5y} \text{ односно, } \boxed{a} \equiv \boxed{1a} \text{ односно, } \boxed{-b} \equiv \boxed{-1b}$$

ОПЕРАЦИЈЕ СА МОНОМИМА

(1) Множење два монома:

Два монома се множе тако што се помноже њихови коефицијенти а "остали" чиниоци се множе по принципу множења степена са једнаким основама.

Пример:

Израчунати производ: $\left(2a^3bx^5y^7\right)\cdot\left(-3ab^2c^2x^3\right)$

Решење:

$$\left(2a^3bx^5y^7\right)\cdot\left(-3ab^2c^2x^3\right)=\left(2\cdot(-3)\right)\cdot\left(a^3\cdot a\right)\cdot\left(b\cdot b^2\right)\cdot c^2\cdot\left(x^5\cdot x^3\right)\cdot y^7=\boxed{-6a^4b^3c^2x^8y^7}$$

(2) ***<u>Сабирање два (или више) монома</u>:***

<u>Напомена</u>:
Два монома се могу сабирати једино ако су они **слични мономи.**

Дакле, најпре треба дефинисати **сличне мономе** а затим описати како се они сабирају.

<u>Дефиниција</u>:
За два монома кажемо да су **<u>слични</u>** ако се они разликују у коефицијенту, евентуално, а све "остало" им је идентично.

<u>Пример</u>:

Моном $\boxed{2a^2bx^3y^6}$ сличан је са мономима:

$$-3a^2bx^3y^6$$

$$\frac{2}{3}a^2bx^3y^6$$

$$\sqrt{2}a^2bx^3y^6$$

$$a^2bx^3y^6$$

$$2a^2bx^3y^6$$

$$-a^2bx^3y^6$$

$$-0,24a^2bx^3y^6$$

Сада кад смо дефинисали сличне мономе, можемо рећи како се они сабирају.

*Два (или више) **<u>сличних монома</u>** се сабирају тако што се саберу њихови коефицијенти а све "остало" се допише.*

<u>Примери</u>:
Израчунати:

1) $\boxed{2a^2b+5a^2b}=(2+5)a^2b=\boxed{7a^2b}$

2) $\boxed{-3b^2x^5+8b^2x^5}=(-3+8)b^2x^5=\boxed{5b^2x^5}$

3) $\boxed{-\frac{3}{4}a^3xy^7-3a^3xy^7}=\left(-\frac{3}{4}+(-3)\right)a^3xy^7=\frac{-3+(-12)}{4}a^3xy^7=\boxed{-\frac{15}{4}a^3xy^7}$

4) $\boxed{\frac{3}{4}ab^3-\frac{1}{6}ab^3}=\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{6}\right)ab^3=\frac{9-2}{12}ab^3=\boxed{\frac{7}{12}ab^3}$

5) $\boxed{2x^3y-\sqrt{3}x^3y}=\boxed{\left(2-\sqrt{3}\right)x^3y}$

6) $\boxed{a^2bx^5-\frac{7}{3}a^2bx^5}=\left(1-\frac{7}{3}\right)a^2bx^5=\frac{3-7}{3}a^2bx^5=\boxed{\frac{4}{3}a^2bx^5}$

7) $\boxed{x^2y^3z+x^2y^3z}=(1+1)x^2y^3z=\boxed{2x^2y^3z}$

8) $\boxed{xy^4-xy^4}=(1-1)xy^4=0xy^4=\boxed{0}$

9) $\boxed{-6ab^2x^2+6ab^2x^2}=(-6+6)ab^2x^2=0ab^2x^2=\boxed{0}$

10) $\boxed{15a^3x-15a^3x}=(15-15)a^3x=0a^3x=\boxed{0}$

ПОЛИНОМИ

Дефиниција **(2)**
Збир два или више несличних монома назива се **ПОЛИНОМ** а ти сабирци *(мономи)* називају се **чланови полинома**.

Пример:
Посматрајмо полином:

$\boxed{3a^2b+2ab^3-5b^2-6ab-b+a-7}$

Овај полином има седам чланова, а ти члнови су његови сабирци. Наиме, овај полином се може писати у облику збира:

$$(3a^2b)+(2ab^3)+(-5b^2)+(-6ab)+(-b)+a+(-7)$$

Дакле, чланови овог полинома су:

$$(3a^2b);\ (2ab^3);\ (-5b^2);\ (-6ab);\ (-b);\ a;\ (-7);$$

Овде је нарочито важно уочити да знак $(+)$ или $(-)$ у датом полиному представља знак члана испред кога стоји а операцијски знак за сабирање ми уствари замишљамо.

Напомена:
Двочлани полином назива се **БИНОМ**
Трочлани полином назива се **ТРИНОМ**
Може се сматрати да је **једночлани** полином заправо **МОНОМ**.

Полином који има само једну промењиву, рецимо $\boxed{x}$ можемо означити са $\boxed{P(x)}$, или рецимо ако је промењива $\boxed{a}$ онда се он може означити са $\boxed{P(a)}$ и слично.

ОПЕРАЦИЈЕ СА ПОЛИНОМИМА И МОНОМИМА

(3) ***<u>Сабирање (одузимање) полинома</u>:***

Два полинома се сабирају тако што се <u>саберу</u> њихови <u>слични чланови</u> а сви остали чланови се препишу.

<u>Пример</u>:

Нека су дати полиноми:

$\boxed{P = 4a^2 - 2ab^3 - b^4 + 2}$ и $\boxed{Q = -5a^2 + a^2b - 6ab^3 + b^4 - a^3 - 3}$ Израчунати:

1) $P + Q$

2) $P - Q$

<u>Решење</u>:

1) $\boxed{P+Q} = \left(4a^2 - 2ab^3 - b^4 + 2\right) + \left(-5a^2 + a^2b - 6ab^3 + b^4 - a^3 - 3\right) =$

$= 4a^2 - 2ab^3 - b^4 + 2 - 5a^2 + a^2b - 6ab^3 + b^4 - a^3 - 3 =$

$= \left(4a^2 - 5a^2\right) + \left(-2ab^3 - 6ab^3\right) + \left(-b^4 + b^4\right) + \left(2 - 3\right) + a^2b - a^3 =$

$= -a^2 - 8ab^3 + 0 - 1 + a^2b - a^3 = \boxed{-a^3 - a^2 + a^2b - 8ab^3 - 1}$

2) $\boxed{P-Q} = \left(4a^2 - 2ab^3 - b^4 + 2\right) - \left(-5a^2 + a^2b - 6ab^3 + b^4 - a^3 - 3\right) =$

Овде ћемо прво, како се то у математичком жаргону каже, "да се ослободимо заграда". Ако је испред заграде знак "минус" $(-)$ *онда се заграда уклони а сваком члану из заграде се "промени знак" а ако је испред заграде знак "плус"* $(+)$ *онда се заграда једноставно уклони, затим поступамо као у претходном примеру. Тако добијамо:*

$= 4a^2 - 2ab^3 - b^4 + 2 + 5a^2 - a^2b + 6ab^3 - b^4 + a^3 + 3 =$

$= \left(4a^2 + 5a^2\right) + \left(-2ab^3 + 6ab^3\right) + \left(-b^4 - b^4\right) + \left(2 + 3\right) - a^2b + a^3 =$

$= 9a^2 + 4ab^3 - 2b^4 + 5 - a^2b + a^3 = \boxed{a^3 + 9a^2 + 4ab^3 - a^2b - 2b^4 + 5}$

(4) ***Множење монома и полинома:***

Полином се множи мономом по закону дистрибуције $\boxed{A\cdot(B+C)=A\cdot B+A\cdot C}$, *наиме, сваки члан полинома се помножи тим мономом и тако добијени производи се саберу.*

Пример:
Израчунати:
$-2a^2b\cdot\left(-3a^2+a-b^3-ab+2\right)$

Решење:

$$\boxed{-2a^2b\cdot\left(-3a^2+a-b^3-ab+2\right)}=$$
$$=\left(-2a^2b\right)\cdot\left(-3a^2\right)+\left(-2a^2b\right)\cdot a+\left(-2a^2b\right)\cdot\left(-b^3\right)+\left(-2a^2b\right)\cdot 2=$$
$$=\boxed{6a^4b-2a^3b+2a^2b^4-4a^2b}$$

(5) ***Множење два полинома:***

Два полинома се множе тако што се сваки члан једног полинома помножи са сваким чланом другог полинома и тако добијени производи се саберу.

Пример:
Израчунати:
$\left(2a-3b^2\right)\cdot\left(4a^2+6ab^2+9b^4\right)$

Решење:

$$\boxed{\left(2a-3b^2\right)\cdot\left(4a^2+6ab^2+9b^4\right)}=$$
$$=2a\cdot 4a^2+2a\cdot 6ab^2+2a\cdot 9b^4+\left(-3b^2\right)\cdot 4a^2+\left(-3b^2\right)\cdot 6ab^2+\left(-3b^2\right)\cdot 9b^4=$$
$$=8a^3\cancel{+12a^2b^2}\cancel{+18ab^4}\cancel{-12a^2b^2}\cancel{-18ab^4}-27b^6=\boxed{8a^3-27b^6}$$

<u>Пример</u>:

Применом <u>можења полинома</u> израчунати:

1) $(A+B)^2$

2) $(A-B)^2$

3) $(A+B)^3$

4) $(A-B)^3$

5) $(A-B)(A+B)$

6) $(A+B)(A^2-AB+B^2)$

7) $(A-B)(A^2+AB+B^2)$

<u>Решење</u>:

1) $\boxed{(A+B)^2}=(A+B)(A+B)=A^2+AB+AB+B^2=\boxed{A^2+2AB+B^2}$

$\boxed{(A+B)^2=A^2+2AB+B^2} \rightarrow$ *(квадрат збира)*

2) $\boxed{(A-B)^2}=(A-B)(A-B)=A^2-AB-AB+B^2=\boxed{A^2-2AB+B^2}$

$\boxed{(A-B)^2=A^2-2AB+B^2} \rightarrow$ *(квадрат разлике)*

3) *Овде можемо користити претходно добијени резултат за <u>квадрат збира</u>, тако добијамо:*

$$\boxed{(A+B)^3}=(A+B)(A+B)^2=(A+B)(A^2+2AB+B^2)=$$
$$=A^3+2A^2B+AB^2+A^2B+2AB^2+B^3=$$
$$=\boxed{A^3+3A^2B+3AB^2+B^3}$$

$\boxed{(A+B)^3=A^3+3A^2B+3AB^2+B^3} \rightarrow$ *(куб збира)*

4) *Слично као у претходном задатку, користићемо добијени резултат за <u>квадрат разлике</u> сада имамо:*

$$\boxed{(A-B)^3}=(A-B)(A-B)^2=(A-B)(A^2-2AB+B^2)=$$
$$=A^3-2A^2B+AB^2-A^2B+2AB^2-B^3=$$
$$=\boxed{A^3-3A^2B+3AB^2-B^3}$$

$\boxed{(A-B)^3=A^3-3A^2B+3AB^2-B^3} \rightarrow$ *(куб разлике)*

5) $\boxed{(A-B)(A+B)} = A^2 \cancel{+AB} \cancel{-AB} - B^2 = \boxed{A^2 - B^2}$

$\boxed{A^2 - B^2 = (A-B)(A+B)} \rightarrow$ *(разлика квадрата)*

6) $\boxed{(A+B)(A^2 - AB + B^2)} = A^3 \cancel{-A^2B} \cancel{+AB^2} \cancel{+A^2B} \cancel{-AB^2} + B^3 = \boxed{A^3 + B^3}$

$\boxed{A^3 + B^3 = (A+B)(A^2 - AB + B^2)} \rightarrow$ *(збир кубова)*

7) $\boxed{(A-B)(A^2 + AB + B^2)} = A^3 \cancel{+A^2B} \cancel{+AB^2} \cancel{-A^2B} \cancel{-AB^2} - B^3 = \boxed{A^3 - B^3}$

$\boxed{A^3 - B^3 = (A-B)(A^2 + AB + B^2)} \rightarrow$ *(разлика кубова)*

У овом примеру добили смо важне формуле које ћемо често користити.

$$\left.\begin{array}{l} \boxed{(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2} \\ \boxed{(A-B)^2 = A^2 - 2AB + B^2} \end{array}\right\} \rightarrow \text{(квадрат бинома)}$$

$$\left.\begin{array}{l} \boxed{(A+B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3} \\ \boxed{(A-B)^3 = A^3 - 3A^2B + 3AB^2 - B^3} \end{array}\right\} \rightarrow \text{(куб бинома)}$$

$\boxed{A^2 - B^2 = (A-B)(A+B)} \rightarrow$ *(разлика квадрата)*

$\boxed{A^3 + B^3 = (A+B)(A^2 - AB + B^2)} \rightarrow$ *(збир кубова)*

$\boxed{A^3 - B^3 = (A-B)(A^2 + AB + B^2)} \rightarrow$ *(разлика кубова)*

<u>Пример</u>:

Користећи формуле за <u>квадрат бинома</u> $\boxed{(A \pm B)^2 = A^2 \pm 2AB + B^2}$ квадрирати следеће биноме:

1) $2x+3y$

2) $1-3x$

3) $-2x+5y$

4) ax^2+2y

5) $-4a-3b$

6) $2ax-\frac{1}{2}$

7) $\frac{x}{3}-\frac{y}{2}$

8) a^2+2b^3

9) $2ax^3-3b^2y^2$

10) $a\sqrt{2}-3$

<u>Решење</u>:

1) $\boxed{(2x+3y)^2} = (2x)^2 + 2(2x)(3y) + (3y)^2 = \boxed{4x^2+12xy+9y^2}$

2) $\boxed{(1-3x)^2} = 1^2 - 2\cdot 1\cdot 3x + (3x)^2 = \boxed{1-6x+9x^2}$

3) $\boxed{(-2x+5y)^2} = (-2x)^2 + 2(-2x)(5y) + (5y)^2 = \boxed{4x^2-20xy+25y^2}$

4) $\boxed{(ax^2+2y)^2} = (ax^2)^2 + 2\cdot ax^2\cdot 2y + (2y)^2 = \boxed{a^2x^4+4ax^2y+4y^2}$

5) $\boxed{(-4a-3b)^2} = \left[-(4a+3b)\right]^2 = \boxed{(4a+3b)^2} = (4a)^2 + 2(4a)(3b) + (3b)^2 =$
$= \boxed{16a^2+24ab+9b^2}$

6) $\boxed{\left(2ax-\frac{1}{2}\right)^2} = (2ax)^2 - \cancel{2}\cdot 2ax\cdot\frac{1}{\cancel{2}} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \boxed{4a^2x^2-2ax+\frac{1}{4}}$

7) $\boxed{\left(\frac{x}{3}-\frac{y}{2}\right)^2} = \left(\frac{x}{3}\right)^2 - \cancel{2}\cdot\frac{x}{3}\cdot\frac{y}{\cancel{2}} + \left(\frac{y}{2}\right)^2 = \boxed{\frac{x^2}{9}-\frac{xy}{3}+\frac{y^2}{4}}$

8) $\boxed{(a^2+2b^3)^2} = (a^2)^2 + 2(a^2)(2b^3) + (2b^3)^2 = \boxed{a^4+4a^2b^3+4b^6}$

9) $\boxed{\left(2ax^3-3b^2y^2\right)^2}=\left(2ax^3\right)-2\cdot\left(2ax^3\right)\cdot\left(3b^2y^2\right)+\left(3b^2y^2\right)^2=\boxed{4a^2x^6-4ab^2x^3y^2+9b^4y^4}$

10) $\boxed{\left(a\sqrt{2}-3\right)^2}=\left(a\sqrt{2}\right)^2-2\cdot\left(a\sqrt{2}\right)\cdot 3+3^2=\boxed{2a^2-6a\sqrt{2}+9}$

Пример:

Користећи образац за <u>куб бинома</u> $\boxed{\left(A\pm B\right)^3=A^3\pm 3A^2B+3AB^2\pm B^3}$ израчунати кубове следећин бинома:

1) $2a+3b$

2) $x-2y$

3) $2-x$

4) $x+2a$

5) $1-3a$

<u>Решење</u>:

1) $\boxed{\left(2a+3b\right)^3}=\left(2a\right)^3+3\cdot\left(2a\right)^2\cdot\left(3b\right)+3\cdot\left(2a\right)\cdot\left(3b\right)^2+\left(3b\right)^3=$

$=\boxed{8a^3+36a^2b+54ab^2+27b^3}$

2) $\boxed{\left(x-2y\right)^3}=x^3-3x^2\cdot\left(2y\right)+3x\cdot\left(2y\right)^2+\left(2y\right)^3=\boxed{x^3-6x^2y+12xy^2+8y^3}$

3) $\boxed{\left(2-x\right)^3}=2^3-3\cdot 2^2\cdot x+3\cdot 2\cdot x^2-x^3=\boxed{8-12x+6x^2-x^3}$

4) $\boxed{\left(x+2a\right)^3}=x^3+3\cdot x^2\cdot 2a+3\cdot x\cdot\left(2a\right)^2+\left(2a\right)^3=\boxed{x^3+6ax^2+12a^2x+8a^3}$

5) $\boxed{\left(1-3a\right)^3}=1^3-3\cdot 1^2\cdot 3a+3\cdot 1\cdot\left(3a\right)^2-\left(3a\right)^3=\boxed{1-9a+27a^2-27a^3}$

(6) ***<u>Дељење полинома</u>:***

Поступак дељења полинима је сличан поступку који вршимо код "писменог дељења бројева". Сам поступак дељења ћемо описати на следећем примеру.

<u>Пример 1</u>:

Израчунати количник:

$$\left(x^3-x^4+2x^5-3x+x^6+4x^2+4\right):\left(2x-2+x^2\right)$$

<u>Решење</u>:

Први корак је да све чланове полинома, како дељеника тако и делиоца, поређамо по опадајућим степенима:

$$\left(\boxed{x^6}+2x^5-x^4+x^3+4x^2-3x+4\right):\left(\boxed{x^2}+2x-2\right)=$$

Сада <u>делимо</u> први члан дељеника (то је члан са највећим степеном, у нашем примеру то је $\boxed{x^6}$), са првим чланом делиоца (то је такође члан са највећим степеном, у нашем примеру то је $\boxed{x^2}$). Њихов количник је $\boxed{x^4}$. Дакле:

$$\left(\boxed{x^6}+2x^5-x^4+x^3+4x^2-3x+4\right):\left(\boxed{x^2}+2x-2\right)=\boxed{x^4}$$

Следећи корак је да са добијеним количником помножимо полином делилац и да добијени полином <u>одузмемо од полинома дељеника</u>. Тако *добијамо:*

$$\begin{array}{l}\left(\boxed{x^6}+2x^5-x^4+x^3+4x^2-3x+4\right):\left(\boxed{x^2}+2x-2\right)=\boxed{x^4}\\ \underline{-\left(x^6+2x^5-2x^4\right)}\\ \qquad\qquad\left(x^4+x^3+4x^2-3x+4\right)\end{array}$$

Као резултат смо добили полином $\left(x^4+x^3+4x^2-3x+4\right)$ и он је сада <u>дељеник</u>. *Сада се понавља поступак <u>дељења</u> са новим дељеником:*

$$\begin{array}{l}\left(x^6+2x^5-x^4+x^3+4x^2-3x+4\right):\left(\boxed{x^2}+2x-2\right)=\boxed{x^4+x^2}\\ \underline{-\left(x^6+2x^5-2x^4\right)}\\ \qquad\qquad\left(\boxed{x^4}+x^3+4x^2-3x+4\right)\\ \qquad\qquad\underline{-\left(x^4+2x^3-2x^2\right)}\\ \qquad\qquad\qquad\left(-x^3+6x^2-3x+4\right)\end{array}$$

Даље, поступак настављамо на исти начин док год је могуће дељење водећих чланова полинома:

$$\left(x^6+2x^5-x^4+x^3+4x^2-3x+4\right):\left(\boxed{x^2}+2x-2\right)=\boxed{x^4+x^2-x+8}$$

$$-\left(x^6+2x^5-2x^4\right)$$

$$\left(x^4+x^3+4x^2-3x+4\right)$$

$$-\left(x^4+2x^3-2x^2\right)$$

$$\left(\boxed{-x^3}+6x^2-3x+4\right)$$

$$-\left(-x^3-2x^2+2x\right)$$

$$\left(\boxed{8x^2}-5x+4\right)$$

$$-\left(8x^2+16x-16\right)$$

$$\boxed{-21x+20}\rightarrow \textit{(остатак)}$$

Дакле, дељењем полинома: $\left(x^3-x^4+2x^5-3x+x^6+4x^2+4\right):\left(2x-2+x^2\right)$ добија се количник $\boxed{x^4+x^2-x+8}$ и остатак $\boxed{-21x+20}$ односно:

$$\underbrace{\left(x^3-x^4+2x^5-3x+x^6+4x^2+4\right)}_{P(x)}:\underbrace{\left(2x-2+x^2\right)}_{Q(x)}=\underbrace{\boxed{x^4+x^2-x+8}}_{S(x)}\qquad \underbrace{\left[-21x+20\right]}_{R(x)}$$

Уопштено, имамо:

$$\boxed{P(x):Q(x)=S(x)\qquad \left[R(x)\right]}\Leftrightarrow \boxed{S(x)\cdot Q(x)+R(x)=P(x)}$$

Напомена:

Ако је делилац $Q(x)$ полином $n-$тог степена онда остатак $R(x)$ може имати највећи могући степен $(n-1)$.

Ако је полином $P(x)$ <u>дељив</u> са полиномом $Q(x)$ онда је остатак $R(x)=0$ односно <u>нема остатка</u>. Узмимо пример.

<u>Пример 2</u>:

Израчунати количник: $\left(x^5-2x^4+5x^3-3x^2+6x-4\right):\left(x^3+x-1\right)$.

<u>Решење</u>:

$$\left(\boxed{x^5}-2x^4+5x^3-3x^2+6x-4\right):\left(\boxed{x^3}+x-1\right)=\boxed{x^2-2x+4}$$

$$\underline{-\left(x^5+x^3-x^2\right)}$$

$$\left(\boxed{-2x^4}+4x^3-2x^2+6x-4\right)$$

$$\underline{-\left(-2x^4-2x^2+2x\right)}$$

$$\left(\boxed{4x^3}+4x-4\right)$$

$$\underline{-\left(4x^3+4x-4\right)}$$

$$\boxed{0}$$

Дакле, дати полиноми су дељиви па је

$$\left(x^5-2x^4+5x^3-3x^2+6x-4\right):\left(x^3+x-1\right)=\boxed{x^2-2x+4}$$

Односно:

$$\left(x^2-2x+4\right)\cdot\left(x^3+x-1\right)=\left(x^5-2x^4+5x^3-3x^2+6x-4\right)$$

Безуов став:

Остатак $\boxed{r}$ при дељењу полинома $\boxed{P(x)}$ са $\boxed{x-a}$, где је $\boxed{a}$ константа, је вредност тог полинома за $x=a$, односно:

$$\boxed{r=P(a)}$$

Пример 1:

Користећи ***Безуов став***, одредити остатак дељења полинома:

$$\left(3x^6-x^3+3x^2-4x+1\right):\left(x+2\right)$$

Решење:

$$P(x)=\left(3x^6-x^3+3x^2-4x+1\right)$$

$$\boxed{x-a}\equiv(x+2)=\left(x-(-2)\right)\Rightarrow\boxed{a=(-2)}$$

$$\boxed{r}=P(-2)=3(-2)^6-(-2)^3+3(-2)^2-4(-2)+1=3\cdot 2^6+2^3+3\cdot 2^2+8+1=$$

$$=3\cdot 64+8+12+9=192+29=\boxed{221}$$

$$\boxed{r=221}$$

Провера:

Претходни пример можемо проверити тако што ћемо поделити дате полиноме поступком који смо описали раније.

$$\left(\boxed{3x^6}-x^3+3x^2-4x+1\right):\left(\boxed{x}+2\right)=3x^5-6x^4+12x^3-25x^2+53x-110$$

$$\underline{-(3x^6+6x^5)}$$

$$\left(\boxed{-6x^5}-x^3+3x^2-4x+1\right)$$

$$\underline{-\left(-6x^5-12x^4\right)}$$

$$\left(\boxed{12x^4}-x^3+3x^2-4x+1\right)$$

$$\underline{-\left(12x^4+24x^3\right)}$$

$$\left(\boxed{-25x^3}+3x^2-4x+1\right)$$

$$\underline{-\left(-25x^3-50x^2\right)}$$

$$\left(\boxed{53x^2}-4x+1\right)$$

$$\underline{-\left(53x^2+106x\right)}$$

$$\left(\boxed{-110x}+1\right)$$

$$\underline{-\left(-110x-220\right)}$$

$$\boxed{221}\quad\rightarrow\quad\textit{(остатак)}$$

Дакле, добили смо исти остатак као у претходном поступку.

<u>Пример 2</u>:
Одредити реалан параметар m тако да полином $P(x)=x^5+mx^3+3x^2-2x+8$, буде дељив са $(x+2)$.
<u>Решење</u>:
На основу ***Безуовог става*** имамо да је остатак $\boxed{r=P(-2)}$, али како је полином $P(x)$ дељив са $(x+2)$ то је остатак $\boxed{r=0}$, односно:

$$\boxed{P(-2)=0}$$

Дакле:

$$(-2)^5+m(-2)^3+3\cdot(-2)^2-2\cdot(-2)+8=0$$

Добили смо једначину у којој је непозната m. Решавањем ове једначине добијамо:

$$-32-8m+3\cdot4+4+8=0$$
$$-32-8m+12+12=0$$
$$-8m-8=0$$
$$-8m=8\,/:(-8)$$
$$\boxed{m=(-1)}$$

Коначно, добили смо да је дати полином $P(x)=x^5+mx^3+3x^2-2x+8$ дељив са $(x+2)$ ако је $\boxed{m=(-1)}$.

<u>Пример 3</u>:
За које је реалне вредности параметра n полином
$P(x)=x^3-3nx^2+4(n^2+1)x-(n^3+5)$ дељив са $(x-1)$?
<u>Решење</u>:
Треба решити једначину:

$$\boxed{P(1)=0}$$
$$1^3-3n\cdot1^2+4(n^2+1)\cdot1-(n^3+5)=0$$
$$\cancel{1}-3n+4n^2\cancel{+4}-n^3\cancel{-5}=0$$
$$-3n+4n^2-n^3=0\,/\cdot(-1)$$
$$n^3-4n^2+3n=0$$
$$n(n^2-4n+3)=0$$
$$n\left(\underbrace{n^2-n}\underbrace{-3n+3}\right)=0$$
$$n\left(n(n-1)-3(n-1)\right)=0$$
$$\boxed{n(n-1)(n-3)=0}$$

Да би претходни производ био једнак ***нули*** потребно је да је бар један од чинилаца једнак ***нули***. Тако добијамо:

$$\boxed{n(n-1)(n-3)=0}$$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{n=0} \quad \vee \quad \boxed{n-1=0} \quad \vee \quad \boxed{n-3=0}$$

$$\boxed{n_1=0} \qquad \boxed{n_2=1} \qquad \boxed{n_3=3}$$

Дакле, добили смо <u>три решења</u>.

<u>Одговор</u>:

Дати полином $P(x)=x^3-3nx^2+4(n^2+1)x-(n^3+5)$ је дељив са $(x-1)$ ако је: $\boxed{n_1=0}$ или $\boxed{n_2=1}$ или $\boxed{n_3=3}$.

<u>Пример 4</u>:

Одредити реалне вредности параметара a и b да полином: $P(x)=ax^3-bx^2-5x+4$ при дељењу са $(x+1)$ даје остатак 6 а да при дељењу са $(x-1)$ даје остатак2.

<u>Решење</u>:

На основу ***Безуовог става*** добијамо две једначине:

$$\boxed{P(-1)=6}$$

$$\boxed{P(1)=2}$$

Односно добили смо систем једначина:

$$a\cdot(-1)^3-b\cdot(-1)^2-5\cdot(-1)+4=6$$

$$\underline{a\cdot 1^3-b\cdot 1^2-5\cdot 1+4=2}$$

$$-a-b+5+4=6$$

$$\underline{a-b-5+4=2}$$

$$-a-b=-3 \,/\cdot(-1)$$

$$\underline{a-b-1=2}$$

$$\left.\begin{aligned} a+b&=3\\ a-b&=3 \end{aligned}\right]+$$

$$2a=6 \,/:2$$

$$\underline{b=3-a}$$

$$a=3$$

$$\underline{b=3-3}$$

$$\boxed{\begin{aligned} a&=3\\ b&=0 \end{aligned}}$$

Дакле, за $\boxed{a=3}$ и $\boxed{b=0}$ дати полином $P(x)$ испуњава услове задатка.

РАСТАВЉАЊЕ ПОЛИНОМА НА ЧИНИОЦЕ

Раставити полином $P(x)$ на чиниоце значи написати тај полином у облику ***<u>производа</u>*** неких других полинома, рецимо, $Q_1(x);Q_2(x);\ \dots\ ;Q_n(x)$, односно:

$$\boxed{P(x)=Q_1(x)\cdot Q_2(x)\cdot Q_3(x)\cdot\ldots\cdot Q_n(x)}$$

<u>Пример</u>:

Полином $\boxed{x^2-7x+10}$ може се раставити на два чиниоца и то: $\boxed{x-2}$ и $\boxed{x-5}$, односно:

$$\boxed{x^2-7x+10=(x-2)(x-5)}$$

<u>Провера</u>:

Множењем можемо проверити:

$$\boxed{(x-2)(x-5)}=x^2-5x-2x+10=\boxed{x^2-7x+10}$$

Дакле, уверили смо се да је тачна тврдња: $\boxed{x^2-7x+10=(x-2)(x-5)}$.

Поставља се питање: ***Како се дошло до чинилаца*** $\boxed{x-2}$ и $\boxed{x-5}$***?*** Одговор на ово питање, је једноставан. Постоје методе по којима се полиноми растављају на чиниоце. Ми ћемо се у наредном делу бавити неким од тих метода.

<u>Методе за растављање плинома на чиниоце</u>:

(1) ***<u>Примена дистрибутривног закона</u>:***

("Издвајање заједничког чиниоца испред заграде")

Ова метода је заснована на закону дистрибуције:

$$\boxed{A\cdot B+A\cdot C=A\cdot(B+C)}$$

Наиме, ако имамо полином код кога су <u>сви чланови</u> дељиви са истим <u>изразом</u>, онда је тај израз њихов <u>заједнички чинилац</u>, па се он може <u>издвојити испред заграде</u> а у загради остаје полином који се добије тако што се сваки његов члан подели са тим заједничким чиниоцем. Покажимо то на примеру.

<u>Пример 1</u>:

Раставити на чиниоце полином: $4a^2x^4-4a^2x^3+4a^2x$.

<u>Решење</u>:

$$\boxed{4a^2x^4-4a^2x^3+4a^2x}=4\cdot a^2\cdot x\cdot x^3-4\cdot a^2\cdot x\cdot x^2+4\cdot a^2\cdot x\cdot 1=4\cdot a^2\cdot x\cdot\left(x^3-x^2+1\right)=$$

$$=\boxed{4a^2x\left(x^3-x^2+1\right)}$$

<u>Напомена</u>:

У претходном примеру смо добили два чиниоца: моном $\boxed{4a^2x}$ и трином $\boxed{x^3-x^2+1}$, мада бисмо могли рећи да су 4; a^2 и x такође чиниоци али код растављања полинома на чиниоце ипак моном $4a^2x$ сматрамо једним чиниоцем.

<u>Пример 2</u>:

Раставити на чиниоце следеће полиноме:

a) $3a^4b+2a^3b^2-5a^2$

b) $36x^6y-12x^4y^2-24x^3y$

c) $9a^3bc^2-18a^2b^2c^2-27ab^3c^2$

d) $\frac{3}{2}ax^5y^2-0,5x^3y^2+2,5x^2y^3$

e) $-5x^3y^3+15x^2y^2-20xy^2$

<u>Решење</u>:

a) $3a^4b+2a^3b^2-5a^2=\boxed{a^2\left(3a^2b+2ab^2-5\right)}$

b) $36x^6y-12x^4y^2-24x^3y=\boxed{12x^3y\left(3x^3-xy-2\right)}$

c) $9a^3bc^2-18a^2b^2c^2-27ab^3c^2=\boxed{9abc^2\left(a^2-2ab-3b^2\right)}$

d) $\frac{3}{2}ax^5y^2-0,5x^3y^2+2,5x^2y^3=\frac{3}{2}ax^5y^2-\frac{1}{2}x^3y^2+\frac{5}{2}x^2y^3=\boxed{\frac{1}{2}x^2y^2\left(3ax^3-x+5y\right)}$

e) $-5x^3y^3+15x^2y^2-20xy^2=\boxed{-5xy^2\left(x^2y-3x+4\right)}$

<u>Пример 3</u>:

Издвајањем заједничког чиниоца испред заграде, раставити на чиниоце следеће изразе:

a) $a(a+c)-x(a+c)$

b) $3x(y-5)+2(y-5)$

c) $b(x-3)+c(x-3)+3-x$

d) $p(x+y+1)-q(x+y+1)+r(x+y+1)$

<u>Решење</u>:

a) $a(a+c)-x(a+c)=(a+c)(a-x)$

b) $3x(y-5)+2(y-5)=(y-5)(3x+2)$

c) $\boxed{b(x-3)+c(x-3)+3-x}=b(x-3)+c(x-3)-1(x-3)=\boxed{(x-3)(b+c-1)}$

d) $p(x+y+1)-q(x+y+1)+r(x+y+1)=(x+y+1)(p-q+r)$

(2) ***<u>Примена формула</u>:***

$$\left.\begin{array}{l}\boxed{A^2+2AB+B^2=(A+B)^2}\\ \boxed{A^2-2AB+B^2=(A-B)^2}\end{array}\right\}\rightarrow$$ *(квадрат бинома)*

$$\left.\begin{array}{l}\boxed{A^3+3A^2B+3AB^2+B^3=(A+B)^3}\\ \boxed{A^3-3A^2B+3AB^2-B^3=(A-B)^3}\end{array}\right\}\rightarrow$$ *(куб бинома)*

$\boxed{A^2-B^2=(A-B)(A+B)}\rightarrow$ *(разлика квадрата)*

$\boxed{A^3+B^3=(A+B)(A^2-AB+B^2)}\rightarrow$ *(збир кубова)*

$\boxed{A^3-B^3=(A-B)(A^2+AB+B^2)}\rightarrow$ *(разлика кубова)*

$$\boxed{A^4-B^4=(A^2-B^2)(A^2+B^2)=(A-B)(A+B)(A^2+B^2)}$$

Ако код полинома уочимо да је то неки од израза који се налази на левој страни претходно наведених формула, онда ми можемо применом одговарајуће формуле да тај полином раставимо на чиниоце.

Пример 1:

Применом формуле за ***разлику квадрата*** раставити на чиниоце следеће изразе:

a) $4a^2-b^2$

b) $25a^2-9x^2$

c) $\frac{4}{9}-a^2x^2$

d) x^2-y^4

e) x^2-3

f) $a-3$

g) a^6-b^6

h) $16x^4-81$

Решење:

a) $\boxed{4a^2-b^2}=\underbrace{(2a)^2-b^2}_{A^2-B^2}=\underbrace{\boxed{(2a-b)(2a+b)}}_{(A-B)(A+B)}$

b) $\boxed{25a^2-9x^2}=(5a)^2-(3x)^2=\boxed{(5a-3x)(5a+3x)}$

c) $\boxed{\frac{4}{9}-a^2x^2}=\left(\frac{2}{3}\right)^2-(ax)^2=\boxed{\left(\frac{2}{3}-ax\right)\left(\frac{2}{3}+ax\right)}$

d) $\boxed{x^2-y^4}=x^2-(y^2)^2=\boxed{(x-y^2)(x+y^2)}$

e) $\boxed{x^2-3}=x^2-\left(\sqrt{3}\right)^2=\boxed{\left(x-\sqrt{3}\right)\left(x+\sqrt{3}\right)}$

f) $\boxed{a-3}=\left(\sqrt{a}\right)^2-\left(\sqrt{3}\right)^2=\boxed{\left(\sqrt{a}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{3}\right)}$

g) $\boxed{a^6-b^6}=(a^3)^2-(b^3)^2=\underbrace{(a^3-b^3)}_{\text{разлика кубова}}\underbrace{(a^3+b^3)}_{\text{збир кубова}}=$

$$=\boxed{(a-b)(a^2+ab+b^2)(a+b)(a^2-ab+b^2)}$$

h) $\boxed{16x^4-81}=(4x)^2-9^2=(4x^2-9)(4x^2+9)=\left[(2x)^2-3^3\right](4x^2+9)=$

$=\boxed{(2x-3)(2x+3)(4x^2+9)}$

<u>Пример 2</u>:

Применом формула за ***<u>квадрат бинома</u>*** раставити на чиниоце изразе:

a) $x^2-2cx+c^2$

b) x^2+6x+9

c) $25-10a+a^2$

d) $49-28x+4x^2$

e) $16a^2+24ax+9x^2$

f) x^2-2x+1

g) $\frac{1}{9}a^2-\frac{2}{3}ab+b^2$

h) $4a^2+9y^2+12ay$

i) y^2+49x^2-14xy

j) $\frac{1}{4}+\frac{1}{3}a+\frac{1}{9}a^2$

<u>Решење</u>:

a) $\boxed{x^2-2cx+c^2}=\boxed{(x-c)^2}$

b) $\boxed{x^2+6x+9}=\underbrace{x^2+2\cdot x\cdot 3+3^2}_{A^2+2AB+B^2}=\underbrace{\boxed{(x+3)^2}}_{(A+B)^2}$

c) $\boxed{25-10a+a^2}=\underbrace{5^2-2\cdot 5\cdot a+a^2}_{A^2-2AB+B^2}=\underbrace{\boxed{(5-a)^2}}_{(A-B)^2}=\underbrace{\boxed{(a-5)^2}}_{(B-A)^2}$

d) $\boxed{49-28x+4x^2}=7^2-2\cdot 7\cdot 2x+(2x)^2=\boxed{(7-2x)^2}=\boxed{(2x-7)^2}$

e) $\boxed{16a^2+24ax+9x^2}=(4a)^2+2\cdot 4a\cdot 3x+(3x)^2=\boxed{(4a+3x)^2}$

f) $\boxed{x^2-2x+1}=x^2-2x+1^2=\boxed{(x-1)^2}$

g) $\boxed{\frac{1}{9}a^2-\frac{2}{3}ab+b^2}=\left(\frac{1}{3}a\right)^2-2\cdot\frac{1}{3}a\cdot b+b^2=\boxed{\left(\frac{1}{3}a-b\right)^2}$

h) $\boxed{4a^2+9y^2+12ay}=4a^2+12ay+9y^2=(2a)^2+2\cdot 2a\cdot 3y+(3y)^2=\boxed{(2a+3y)^2}$

i) $\boxed{y^2+49x^2-14xy}=49x^2-14xy+y^2=(7x)^2-2\cdot 7x\cdot y+y^2=\boxed{(7x-y)^2}$

j) $\boxed{\frac{1}{4}+\frac{1}{3}a+\frac{1}{9}a^2}=\left(\frac{1}{2}\right)^2+2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}a+\left(\frac{1}{3}a\right)^2=\boxed{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}a\right)^2}$

<u>Пример 3</u>:
Користећи формуле за ***<u>збир кубова</u>*** и ***<u>разлику кубова</u>*** раставити на чиниоце следеће изразе:

a) $8a^3+125$

b) $27+x^3$

c) $8-x^3$

d) $\frac{a^3}{64}+8m^3n^3$

e) $0,027a^3-x^3y^3$

f) x^6+1

g) $(2a-3)^3+64$

h) $(x-5)^3-(3x+2)^3$

i) a^6-b^6

<u>Решење</u>:

a) $\boxed{8a^3+125}=\underbrace{(2a)^3+5^3}_{A^3+B^3}=\underbrace{(2a+5)}_{(A+B)}\underbrace{\left((2a)^2-2a\cdot 5+5^2\right)}_{(A^2-AB+B^2)}=\underbrace{\boxed{(2a+5)(4a^2-10a+25)}}_{(A+B)(A^2-AB+B^2)}$

b) $\boxed{27+x^3}=3^3+x^3=\boxed{(3+x)(9-3x+x^2)}$

c) $\boxed{8-x^3}=2^2-x^3=\boxed{(2-x)(4+2x+x^2)}$

d) $\boxed{\frac{a^3}{64}+8m^3n^3}=\left(\frac{a}{4}\right)^3+(2mn)^3=\left(\frac{a}{4}+2mn\right)\left(\frac{a^2}{16}-\frac{a}{4}\cdot 2mn+4m^2n^2\right)=$

$$=\boxed{\left(\frac{a}{4}+2mn\right)\left(\frac{a^2}{16}-\frac{amn}{2}+4m^2n^2\right)}$$

e) $\boxed{0,027a^3-x^3y^3}=(0,3)^3-(xy)^3=\boxed{(0,3-xy)(0,09-0,3xy+x^2y^2)}$

f) $\boxed{x^6+1}=\left(x^2\right)^3+1^3=\boxed{\left(x^2+1\right)\left(x^4-x^2+1\right)}$

g) $\boxed{(2a-3)^3+64}=(2a-3)^3+4^3=\left[(2a-3)+4\right]\cdot\left[(2a-3)^2-4(2a-3)+4^2\right]=$

$$=(2a+1)\left(4a^2-12a+9-8a+12+16\right)=\boxed{(2a+1)\left(4a^2-20a+37\right)}$$

h) $\boxed{(x-5)^3-(3x+2)^3}=\left[(x-5)-(3x+2)\right]\cdot\left[(x-5)^2+(x-5)(3x+2)+(3x+2)^2\right]=$

$$=(x-5-3x-2)\left(\underbrace{x^2-10x+25}+\underbrace{3x^2+2x-15x-10}+\underbrace{9x^2+12x+4}\right)=$$

$$=\boxed{(-2x-7)\left(13x^2-11x+19\right)}$$

i) $\boxed{a^6-b^6}=\left(a^2\right)^3-\left(b^2\right)^3=\underbrace{\left(a^2-b^2\right)}_{\text{разлика квадрата}}\cdot\left(a^4+a^2b^2+b^4\right)=$

$$=\boxed{(a-b)(a+b)\left(a^4+a^2b^2+b^4\right)}$$

<u>Пример 4</u>:

Користећи формуле за ***<u>куб бинома</u>*** раставити на чиниоце следеће изразе:

a) $27x^3+27x^2y+9xy^2+y^3$

b) $a^3-6a^2b+12ab^2-8b^3$

c) $1+15m+75m^2+125m^3$

d) $8x^3-12x^2+6x-1$

e) $\dfrac{1}{27}+\dfrac{1}{3}a^2+a^4+a^6$

<u>Решење</u>:

a) $\boxed{27x^3+27x^2y+9xy^2+y^3}=\underbrace{(3x)^3+3\cdot(3x)^2\cdot y+3\cdot 3x\cdot y^2+y^3}_{A^3+3A^2B+3AB^2+B^3}=\underbrace{\boxed{(3x+y)^3}}_{(A+B)^3}$

b) $\boxed{a^3-6a^2b+12ab^2-8b^3}=\underbrace{a^3-3\cdot a^2\cdot 2b+3\cdot a\cdot(2b)^2-(2b)^3}_{A^3-3A^2B+3AB^2-B^3}=\underbrace{\boxed{(a-2b)^3}}_{(A-B)^3}$

c) $\boxed{1+15m+75m^2+125m^3}=\underbrace{1^3+3\cdot 1^2\cdot 5m+3\cdot 1\cdot(5m)^2+(5m)^3}_{A^3+3A^2B+3AB^2+B^3}=\underbrace{\boxed{(1+5m)^3}}_{(A+B)^3}$

d) $\boxed{8x^3-12x^2+6x-1}=(2x)^3-3\cdot(2x)^2\cdot 1+3\cdot 2x\cdot 1^2-1^3=\boxed{(2x-1)^3}$

e) $\boxed{\frac{1}{27}+\frac{1}{3}a^2+a^4+a^6}=\left(\frac{1}{3}\right)^3+3\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot a^2+3\cdot\frac{1}{3}\cdot\left(a^2\right)^2+\left(a^2\right)^3=\boxed{\left(\frac{1}{3}+a^2\right)^3}$

(3) ***Метода груписања чланова:***

Ову методу је најбоље описати кроз примере.

Пример 1:

Раставити на чиниоце израз:

$a^3-a^2b+2ab^2-2b^3$

Решење:

Ова метода је базирана на томе да се, у првој фази, дати израз групише на две или више група тако да се свака од тих група може раставити на чиниоце и да све оне имају заједнички чинилац. У нашем примеру то је:

$$\boxed{a^3-a^2b+2ab^2-2b^3}=\underbrace{a^3-a^2b}_{I}+\underbrace{2ab^2-2b^3}_{II}=$$

Уочавамо, да се свака од група може раставити на чиниоце издвајањем заједничког чиниоца испред заграде. Тако добијамо:

$$\boxed{a^3-a^2b+2ab^2-2b^3}=\underbrace{a^3-a^2b}_{I}+\underbrace{2ab^2-2b^3}_{II}=a^2(a-b)+2b^2(a-b)$$

Добили смо израз: $\boxed{a^2(a-b)+2b^2(a-b)}$ *у коме је заједнички чинилац* $(a-b)$, *па се сада он може издвојити испред заграде. Тако добијамо:*

$$\boxed{a^3-a^2b+2ab^2-2b^3}=\underbrace{a^3-a^2b}_{I}+\underbrace{2ab^2-2b^3}_{II}=a^2(a-b)+2b^2(a-b)=$$

$$=\boxed{(a-b)\left(a^2+2b^2\right)}$$

У овом примеру је *груписање чланова* било једноставно јер смо те групе формирали тако да смо одабрали прва два члана у једну групу а следећа два у другу групу, међутим то није увек случај. Некад је потребно премештати те чланове али увек треба имати на уму да *изрази у одабраним групама морају имати заједнички чинилац* који се у другој фази издваја испред заграде.

Пример 2:
Раставити на чиниоце израз:
$14ab+15ac-10a^2-21bc$

Решење:

Прво ћемо преместити неке чланове тако да, после прве фазе растављања на чиниоце, добијемо изразе који имају заједнички чинилац, који се у другој фази издваја као заједнички чинилац испред заграде.

$$\boxed{14ab+15ac-10a^2-21bc}=\underbrace{14ab-21bc}_{I}\underbrace{-10a^2+15ac}_{II}=$$
$$=7b(2a-3c)-5a(2a-3c)=\boxed{(2a-3c)(7b-5a)}$$

У претходна два примера смо имали да се у првој фази кад су већ одабране групе, те групе растављају на чиниоце методом издвајања заједничког чиниоца испред заграде. Наравно, то не мора увек бити тако. Узмимо пример у коме то није случај.

Пример 3:
Раставити на чиниоце израз:
$x^2-y^2-6x^3-6x^2y$

Решење:

$$\underbrace{x^2-y^2}_{\substack{\text{разлика}\\ \text{квадрата}}}\ \underbrace{-6x^3-6x^2y}_{\substack{\text{издвајање заједничког}\\ \text{чиниоца испред заграде}}}=(x-y)(x+y)-6x^2(x+y)=(x+y)\left[(x-y)-6x^2\right]=$$
$$=\boxed{(x+y)(x-y-6x^2)}$$

Сви досадашњи примери су били такви да се дати израз групише у две групе, међутим, има примера кад се израз групише у више група. То ћемо демонстрирати на следећем примеру.

Принер 4:
Раставити на чиниоце изразе:
a) $ax^2+bx^2+ax+bx-ay-by$
b) $2mx-5my+m-2nx+5ny-n$
c) $3a-3b+3c+ax-bx+cx$
d) $a^2x+a^2y-ax-ay+x+y$
e) $ax^2+bx^2-bx-ax+cx^2-cx$

Решење:

a) $$\boxed{ax^2+bx^2+ax+bx-ay-by}=\underbrace{ax^2+bx^2}_{I}+\underbrace{ax+bx}_{II}-\underbrace{ay-by}_{III}=$$

$$=x^2(a+b)+x(a+b)-y(a+b)=\boxed{(a+b)(x^2+x-y)}$$

Напомена:

Овај пример смо могли решити и на другачији начин. Наиме, могли смо и другачије извршити груписање чланова:

$$\boxed{ax^2+bx^2+ax+bx-ay-by}=\underbrace{ax^2+ax-ay}_{I}+\underbrace{bx^2+bx-by}_{II}=$$

$$=a(x^2+x-y)+b(x^2+x-y)=\boxed{(x^2+x-y)(a+b)}$$

b) $$\boxed{2mx-5my+m-2nx+5ny-n}=\underbrace{2mx-2nx}_{I}-\underbrace{5my+5ny}_{II}+\underbrace{m-n}_{III}=$$

$$=2x(m-n)-5y(m-n)+1\cdot(m-n)=$$

$$=\boxed{(m-n)(2x-5y+1)}$$

c) $$\boxed{3a-3b+3c+ax-bx+cx}=\underbrace{3a+ax}_{I}-\underbrace{3b-bx}_{II}+\underbrace{3c+cx}_{III}=$$

$$=a(3+x)-b(3+x)+c(3+x)=$$

$$=\boxed{(3+x)(a-b+c)}$$

Други начин:

$$\boxed{3a-3b+3c+ax-bx+cx}=\underbrace{3a-3b+3c}_{I}+\underbrace{ax-bx+cx}_{II}=$$

$$=3(a-b+c)+x(a-b+c)=$$

$$=\boxed{(a-b+c)(3+x)}$$

d) $$\boxed{a^2x+a^2y-ax-ay+x+y}=\underbrace{a^2x+a^2y}_{I}-\underbrace{ax-ay}_{II}+\underbrace{x+y}_{III}=$$

$$=a^2(x+y)-a(x+y)+1\cdot(x+y)=$$

$$=\boxed{(x+y)(a^2-a+1)}$$

e) $\boxed{ax^2+bx^2-bx-ax+cx^2-cx}=\underbrace{ax^2-ax}_{I}+\underbrace{bx^2-bx}_{II}+\underbrace{cx^2-cx}_{III}=$

$$=ax(x-1)+bx(x-1)+cx(x-1)=$$
$$=(x-1)(ax+bx+cx)=$$
$$=(x-1)\cdot x\cdot(a+b+c)=$$
$$=\boxed{x(x-1)(a+b+c)}$$

Методом ***<u>груписања чланова</u>*** могу се раставити на чиниоце и неки <u>квадратни триноми</u>. Узмимо пример.

<u>Пример 5</u>:

Раставити на чиниоце следеће <u>квадратне триноме</u>:

a) $x^2-10x+9$

b) m^2+6m-7

c) $6a^2+11a+4$

d) $3y^2+20y+12$

e) $6b^2-39b+18$

<u>Решење</u>:

a) *Да бисмо могли користити* ***<u>методу груписања чланова</u>****, прво морамо од датог <u>тринома</u> направити полином који има <u>четири члана</u>. То ћемо постићи тако што ћемо члан* $\boxed{-10x}$ *раздвојити на <u>два сабирка</u> и то:* $\boxed{-x}$ *и* $\boxed{-9x}$, *тако добијамо:*

$$\boxed{x^2-10x+9}=\underbrace{x^2-x}_{I}\underbrace{-9x+9}_{II}=x(x-1)-9(x-1)=\boxed{(x-1)(x-9)}$$

b) $\boxed{m^2+6m-7}=\underbrace{m^2-m}_{I}+\underbrace{7m-7}_{II}=m(m-1)+7(m-1)=\boxed{(m-1)(m+7)}$

c) $\boxed{6a^2+11a+4}=\underbrace{6a^2+3a}_{I}+\underbrace{8a+4}_{II}=3a(2a+1)+4(2a+1)=\boxed{(2a+1)(3a+4)}$

d) $\boxed{3y^2+20y+12}=\underbrace{3y^2+18y}_{I}+\underbrace{2y+12}_{II}=3y(y+6)+2(y+6)=\boxed{(y+6)(3y+2)}$

e) $\boxed{6b^2-39b+18}=3(2b^2-13b+6)=3\left(\underbrace{2b^2-12b}_{I}\underbrace{-b+6}_{II}\right)=$

$$=3\left[2b(b-6)-1\cdot(b-6)\right]=\boxed{3(b-6)(2b-1)}$$

(4) ***Комбинована метода:***

Комбинована метода подразумева употребу разних метода за растављање израза на чиниоце. Покажимо неколико примера.

Пример:

Комбинацијом разних метода раставити на чиниоце следеће изразе:

а) $a^2+2ab+b^2-c^2$

b) $x^2-1-2y-y^2$

c) a^2-b^2+a-b

d) $p^3x^2-q^3x^2-p^3+q^3$

e) x^4+4

f) x^4+4y^4

Решење:

а) $\boxed{a^2+2ab+b^2-c^2}=\underbrace{a^2+2ab+b^2}-c^2=(a+b)^2-c^2=\boxed{(a+b-c)(a+b+c)}$

b) $\boxed{x^2-1-2y-y^2}=x^2-(1+2y+y^2)=x^2-(y+1)^2=$

$=[x-(y+1)][x+(y+1)]=\boxed{(x-y-1)(x+y+1)}$

c) $\boxed{a^2-b^2+a-b}=(a-b)(a+b)+1\cdot(a+b)=\boxed{(a+b)(a-b+1)}$

d) $\boxed{p^3x^2-q^3x^2-p^3+q^3}=x^2(p^3-q^3)-1\cdot(p^3-q^3)=$

$=(p^3-q^3)(x^2-1)=$

$=\boxed{(p-q)(p^2+pq+q^2)(x-1)(x+1)}$

e) $\boxed{x^4+4}=\underbrace{x^4+4x^2+4}-4x^2=(x^2+2)^2-(2x)^2=$

$=(x^2+2+2x)(x^2+2-2x)=$

$=\boxed{(x^2+2x+2)(x^2-2x+2)}$

f) $\boxed{x^4+4y^4}=\underbrace{x^4+4y^2+4y^4}-4y^2=(x^2+2y^2)^2-(2y)^2=$

$=\boxed{(x^2+2y^2-2y)(x^2+2y^2+2y)}$

$\boxed{НЗД}$ **И** $\boxed{НЗС}$ **ЗА БРОЈЕВЕ**

$\boxed{НЗД}$ → ***(Највећи Заједнички Делилац)***

$\boxed{НЗС}$ → ***(Најмањи Зеаједнички Садржалац)***

$\boxed{НЗД}$ за два или више бројева је ***највећи*** број са којим су ***дељиви сви дати бројеви***.

Пример:

Одредити $\boxed{НЗД}$ за бројеве: $\boxed{36}$ и $\boxed{24}$.

Први начин:

Делиоци броја $\boxed{36}$ *су:*

$\boxed{1}\,;\ \boxed{2}\,;\ \boxed{3}\,;\ \boxed{4}\,;\ \boxed{6}\,;\ 9\,;\ \boxed{12}\,;\ 18\,;\ 36.$

Делиоци броја $\boxed{24}$ *су:*

$\boxed{1}\,;\ \boxed{2}\,;\ \boxed{3}\,;\ \boxed{4}\,;\ \boxed{6}\,;\ 8\,;\ \boxed{12}\,;\ 24.$

Заједнички делиоци *су:*

$\boxed{1}\,;\ \boxed{2}\,;\ \boxed{3}\,;\ \boxed{4}\,;\ \boxed{6}\,;\ \boxed{12}\,.$

Највећи *међу њима је:* $\boxed{12}$

Ознака: $\boxed{D(36;24)=12}$.

Други начин:

Прво: Раставити оба броја на прости чиниоце.

*Друго: Од добијених чинилаца формирати **прозвод** у коме су заступљени свизаједнички чиниоци узети само једном али на најмањем степену.*

$$36 = 2^2 \cdot 3^2$$
$$24 = 2^3 \cdot 3$$
$$D = 2^2 \cdot 3 = 4 \cdot 3 = \boxed{12}$$

Дакле: $\boxed{D(36;24)=12}$

$\boxed{НЗС}$ за два или више бројева је ***најмањи*** број који ***садржи*** све дате бројеве као своје чиниоце.

Пример:

Одредити $\boxed{НЗС}$ за бројеве: $\boxed{36}$ и $\boxed{24}$.

Први начин:

Садржаоци броја $\boxed{36}$ *су:*

$36\ ;\ \boxed{72}\ ;\ 108\ ;\ \boxed{144}\ ;\ 180\ ;\ \boxed{216}\ ;\ 252\ ;\ \boxed{288}\ ;\ 324\ ;\ \boxed{360}\ ;\ 396\ ;\ \boxed{432}\ ;\ 468\ ;\ \boxed{504}\ ;\ \ldots$

Садржаоци броја $\boxed{24}$ *су:*

$24\ ;\ 48;\ \boxed{72}\ ;\ 96\ ;\ 120\ ;\ \boxed{144}\ ;\ 168\ ;\ 192\ ;\ \boxed{216}\ ;\ 240\ ;\ 264\ ;\ \boxed{288}\ ;\ 312\ ;\ 336\ ;\ \boxed{360}\ ;\ \ldots$

Заједнички садржаоци *су:*

$\boxed{72}\ ;\ \boxed{144}\ ;\ \boxed{216}\ ;\ \boxed{288}\ ;\ \boxed{360}\ ;\ \boxed{432}\ ;\ \boxed{504}\ ;\ \ldots$

Најмањи *међу њима је* $\boxed{72}$

Ознака: $\boxed{S(36;24)=72}$

Други начин:

Прво: раставити оба броја на просте чиниоце

Друго: од добијених чинилаца формирати ***производ*** *у коме су заступљени свиразличити чиниоци узети само једном али на највећем степену.*

$$36=2^2\cdot 3^2$$

$$24=2^3\cdot 3$$

$$S=2^3\cdot 3^2=8\cdot 9=\boxed{72}$$

Дакле: $\boxed{S(36;24)=72}$.

$\boxed{НЗД}$ ЗА ПОЛИНОМЕ

Нека су дати полиноми $P_1;\ P_2;\ \dots;P_n$. $\boxed{НЗД}$ за дате полиноме је "највећи" полином D са којим су ***дељиви*** сви дати полиноми.

Поступак за одређивање $\boxed{НЗД}$ за полиноме ћемо описати кроз примере.

Пример 1:

Одредити $\boxed{НЗД}$ за следеће полиноме:

$a^5+a^3b^2+a^2b^3+b^5;\quad a^5-a^3b^2+a^2b^3-b^5;\quad 4a^5+4a^2b^3$.

Решење:

Најпре ћемо уопштено описати поступак за одређивање $\boxed{НЗД}$, а затим тај поступак применити на датом примеру

Поступак одређивања $\boxed{НЗД}$ ***за полиноме***:

(1) *Раставити све дате полиноме на прости чиниоце.*

(2) *Од добијених чинилаца формирати* ***производ*** *у коме су заступљени сви заједнички чиниоци, узети само једном али на* ***најмањем степену****.*

Пређимо сада на дати пример:

$$
(1)\ \begin{cases}
\boxed{\underbrace{a^5+a^3b^2}+\underbrace{a^2b^3+b^5}}=a^3\left(a^2+b^2\right)+b^3\left(a^2+b^2\right)=\left(a^2+b^2\right)\left(a^3+b^3\right)= \\
\qquad =\boxed{\left(a^2+b^2\right)\left(a+b\right)\left(a^2-ab+b^2\right)} \\
\boxed{\underbrace{a^5-a^3b^2}+\underbrace{a^2b^3-b^5}}=a^3\left(a^2-b^2\right)+b^3\left(a^2-b^2\right)=\left(a^2-b^2\right)\left(a^3+b^3\right)= \\
\qquad =\left(a-b\right)\left(a+b\right)\left(a+b\right)\left(a^2-ab+b^2\right)=\boxed{\left(a-b\right)\left(a+b\right)^2\left(a^2-ab+b^2\right)} \\
\boxed{4a^5+4a^2b^3}=\quad 4a^2\left(a^3+b^3\right)\quad =\boxed{4a^2\left(a+b\right)\left(a^2-ab+b^2\right)}
\end{cases}
$$

$$
(2)\ \Big\{\quad \boxed{НЗД}:\qquad \boxed{\left(a+b\right)\cdot\left(a^2-ab+b^2\right)}
$$

Дакле: $\boxed{D=\left(a+b\right)\left(a^2-ab+b^2\right)}$

Пример 2:

Одредити $\boxed{НЗД}$ за полиноме:

$x^3-3x^2+2x;\quad x^3+3x^2+2x;\quad x^4-x^2$

Решење:

$$(1)\ \begin{cases} \boxed{x^3-3x^2+2x}=x\left(x^2-3x+2\right)=x\left(\underbrace{x^2-2x}-\underbrace{x+2}\right)=x\left(x\left(x-2\right)-1\cdot\left(x-2\right)\right)= \\ \qquad =\boxed{x\left(x-2\right)\left(x-1\right)} \\ \boxed{x^3+3x^2+2x}=x\left(x^2+3x+2\right)=x\left(\underbrace{x^2+2x}+\underbrace{x+2}\right)=x\left(x\left(x+2\right)+1\cdot\left(x+2\right)\right)= \\ \qquad =\boxed{x\left(x+2\right)\left(x+1\right)} \\ \boxed{x^4-x^2}=x^2\left(x^2-1\right)= \qquad =\boxed{x^2\left(x-1\right)\left(x+2\right)} \end{cases}$$

$$(2)\ \left\{\boxed{НЗД}:\qquad \boxed{x}\right.$$

Дакле: $\boxed{D=x}$

Пример 3:

Одредити $\boxed{НЗД}$ за полиноме:

$2x^4-3x^3-8x^2+12x\ ;\quad 6x^3-15x^2+6x$

Решење:

$$(1)\ \begin{cases} \boxed{2x^4-3x^3-8x^2+12x}=x\left(\underbrace{2x^3-3x^2}-\underbrace{8x+12}\right)=x\left(x^2\left(2x-3\right)-4\left(2x-3\right)\right)= \\ \qquad =\left(2x-3\right)\left(x^2-4\right)=\boxed{x\left(2x-3\right)\left(x-2\right)\left(x+2\right)} \\ \boxed{6x^3-15x^2+6x}=3x\left(2x^2-5x+2\right)=3x\left(\underbrace{2x^2-4x}-\underbrace{x+2}\right)= \\ \qquad =3x\left(2x\left(x-2\right)-1\cdot\left(x-2\right)\right)=\boxed{3x\left(x-2\right)\left(2x-1\right)} \end{cases}$$

$$(2)\ \left\{\boxed{НЗД}:\qquad \boxed{x\cdot\left(x-2\right)}\right.$$

Дакле: $\boxed{D=x\left(x-2\right)}$

$\boxed{НЗС}$ ЗА ПОЛИНОМЕ

Нека су дати полиноми: $P_1;\ P_2;\ P_3;\ \dots;\ P_n$. $\boxed{НЗС}$ за дате полиноме је "најмањи" полином S који садржи све дате полиноме као своје чиниоце.

Узмимо исте примере као у претходном, само што ћемо сада одредити $\boxed{НЗС}$ за дате полиноме.

<u>Пример 1</u>:

Одредити $\boxed{НЗС}$ за следеће полиноме:

$a^5+a^3b^2+a^2b^3+b^5;\quad a^5-a^3b^2+a^2b^3-b^5;\quad 4a^5+4a^2b^3$.

<u>Решење</u>:

Слично као и у претходном, најпре ћемо уопштено описати поступак за одређивање $\boxed{НЗС}$ за полиноме, а затим тај поступак применити у датим примерима.

<u>Поступак одређивања</u> $\boxed{НЗС}$ ***<u>за полиноме</u>***:

(1) *Раставити све дате полиноме на <u>просте чиниоце</u>.*

(2) *Од добијених чинилаца формирати **<u>производ</u>** у коме су заступљени <u>сви различити чиниоци, узети само једном или на **највећем степену**</u>.*

У датом примеру имамо:

$$(1)\ \begin{cases} \boxed{\underbrace{a^5+a^3b^2}+\underbrace{a^2b^3+b^5}}=a^3\left(a^2+b^2\right)+b^3\left(a^2+b^2\right)=\left(a^2+b^2\right)\left(a^3+b^3\right)= \\ \qquad =\boxed{\left(a^2+b^2\right)\left(a+b\right)\left(a^2-ab+b^2\right)} \\ \boxed{\underbrace{a^5-a^3b^2}+\underbrace{a^2b^3-b^5}}=a^3\left(a^2-b^2\right)+b^3\left(a^2-b^2\right)=\left(a^2-b^2\right)\left(a^3+b^3\right)= \\ \qquad =\left(a-b\right)\left(a+b\right)\left(a+b\right)\left(a^2-ab+b^2\right)=\boxed{\left(a-b\right)\left(a+b\right)^2\left(a^2-ab+b^2\right)} \\ \boxed{4a^5+4a^2b^3}=4a^2\left(a^3+b^3\right)=\boxed{4a^2\left(a+b\right)\left(a^2-ab+b^2\right)} \end{cases}$$

$$(2)\ \left\{\ \boxed{НЗС}:\qquad \boxed{4\cdot a^2\cdot\left(a-b\right)\cdot\left(a^2+b^2\right)\cdot\left(a+b\right)^2\cdot\left(a^2-ab+b^2\right)}\right.$$

Дакле: $\boxed{S = 4 \cdot a^2 \cdot (a-b) \cdot \left(a^2+b^2\right) \cdot (a+b)^2 \cdot \left(a^2-ab+b^2\right)}$

Пример 2:

Одредити $\boxed{НЗС}$ за полиноме:

$x^3-3x^2+2x; \quad x^3+3x^2+2x; \quad x^4-x^2$

Решење:

$$(1)\ \begin{cases} \boxed{x^3-3x^2+2x} = x\left(x^2-3x+2\right) = x\left(\underline{x^2-2x}-\underline{x+2}\right) = x\left(x(x-2)-1\cdot(x-2)\right) = \\ \qquad = \boxed{x(x-2)(x-1)} \\ \boxed{x^3+3x^2+2x} = x\left(x^2+3x+2\right) = x\left(\underline{x^2+2x}+\underline{x+2}\right) = x\left(x(x+2)+1\cdot(x+2)\right) = \\ \qquad = \boxed{x(x+2)(x+1)} \\ \boxed{x^4-x^2} = x^2\left(x^2-1\right) = \qquad = \boxed{x^2(x-1)(x+2)} \end{cases}$$

$$(2)\ \left\{ \quad \boxed{НЗС}: \qquad \boxed{x^2\cdot(x-2)\cdot(x-1)\cdot(x+2)\cdot(x+1)} \right.$$

Дакле: $\boxed{S = x^2\cdot(x-2)\cdot(x-1)\cdot(x+2)\cdot(x+1)}$

Пример 3:

Одредити $\boxed{НЗС}$ за полиноме:

$2x^4-3x^3-8x^2+12x\ ; \quad 6x^3-15x^2+6x$

Решење:

$$(1)\ \begin{cases} \boxed{2x^4-3x^3-8x^2+12x} = x\left(\underline{2x^3-3x^2}-\underline{8x+12}\right) = x\left(x^2(2x-3)-4(2x-3)\right) = \\ \qquad = (2x-3)\left(x^2-4\right) = \boxed{x(2x-3)(x-2)(x+2)} \\ \boxed{6x^3-15x^2+6x} = 3x\left(2x^2-5x+2\right) = 3x\left(\underline{2x^2-4x}-\underline{x+2}\right) = \\ \qquad = 3x\left(2x(x-2)-1\cdot(x-2)\right) = \boxed{3x(x-2)(2x-1)} \end{cases}$$

$$(2)\ \left\{ \quad \boxed{НЗС}: \qquad \boxed{3\cdot x\cdot(2x-3)\cdot(x-2)\cdot(x+2)\cdot(2x-1)} \right.$$

Дакле: $\boxed{S = 3\cdot x\cdot(2x-3)\cdot(x-2)\cdot(x+2)\cdot(2x-1)}$

Пример 4:

Одредити $\boxed{НЗС}$ за следеће изразе:

a) $3x^3-12x^2+12x;\quad 5x^4+20x^3+20x^2;\quad 3nx^3-12nx$

b) $4x^2+4xy+y^2;\quad 4x^2-y^2;\quad 12x^3-12x^2y+3xy^2$

c) $9a+15;\quad 36a^2-100;\quad -9a^2+30a-25$

d) $a^3+8a^2+16a;\quad a^3+12a^2+48a+64$

Решење:

a)

$$\boxed{3x^3-12x^2+12x}=3x\left(x^2-4x+4\right)=\boxed{3x(x-2)^2}$$

$$\boxed{5x^4+20x^3+20x^2}=5x^2\left(x^2+4x+4\right)=\boxed{5x^2(x+2)^2}$$

$$\boxed{3nx^3-12nx}=3nx\left(x^2-4\right)=\boxed{3nx(x-2)(x+2)}$$

$$\boxed{НЗС}:\quad \boxed{3\cdot5\cdot n\cdot x^2\cdot(x-2)^2\cdot(x+2)^2}$$

Дакле: $S=\boxed{3\cdot5\cdot n\cdot x^2\cdot(x-2)^2\cdot(x+2)^2}=\boxed{15nx^2(x-2)^2(x+2)^2}$

b)

$$\boxed{4x^2+4xy+y^2}=\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\ =\boxed{(2x+y)^2}$$

$$\boxed{4x^2-y^2}=\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\ =\boxed{(2x-y)(2x+y)}$$

$$\boxed{12x^3-12x^2y+3xy^2}=3x\left(4x^2-4xy+y^2\right)=\boxed{3x(2x-y)^2}$$

$$\boxed{НЗС}:\quad \boxed{3x(2x+y)^2(2x-y)^2}$$

Дакле: $\boxed{S=3x(2x+y)^2(2x-y)^2}$

c)

$$\boxed{9a+15}=\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\ =\boxed{3(3a+5)}$$

$$\boxed{36a^2-100}=4\left(9a^2-25\right)=\ \dots\dots\ =\boxed{4(3a-5)(3a+5)}$$

$$\boxed{-9a^2+30a-25}=-\left(9a^2-30a+25\right)=\boxed{-(3a-5)^2}$$

$$\boxed{НЗС}:\quad \boxed{-12(3a+5)(3a-5)^2}$$

Дакле: $\boxed{S=-12(3a+5)(3a-5)^2}$

АЛГЕБАРСКИ РАЗЛОМЦИ

Алгебарски разломци су разломци који у бројиоцу и мениоцу имају алгебарске изразе, као на пример:

$$\frac{a^2-b}{a+3};\quad \frac{x-2}{x^2-2x+x^4};\quad \frac{2}{x^3-8};\quad \frac{a^2+4}{5};\ \dots$$

Другим речима, ***<u>алгебарски разломак</u>*** је рационални алгебарски израз облика $\frac{A}{B}$, где су $\boxed{A}$ и $\boxed{B}$ полиноми. Алгрбарски разломак $\frac{A}{B}$ је *<u>дефинисан</u>* само ако је његов именилац *<u>различит од нуле</u>* , односно разломак $\frac{A}{B}$ је *<u>дефинисан</u>* ако и само ако је $\boxed{B \neq 0}$.

<u>Примери</u>:

1) Разломак $\frac{2x-3}{5}$ је дафинисан за сваку вредност променљиве x.

2) Разломак $\frac{4x^2-1}{x+2}$ је дефинисан за сваку вредност променљиве x осим за $x=(-2)$, односно дати разломак је *<u>дефинисан</u>и* за $\forall x \in R \setminus \{-2\}$.

3) Под којим условом је дефинисан разломак $\frac{a+3}{a^2-4}$?

<u>Решење</u>:
Дати разломак је дефинисан за оне вредности променљиве a за које је његов именилац <u>различит од нуле</u>, тј.

$$a^2-4 \neq 0$$
$$(a-2)(a+2) \neq 0$$
$$a-2 \neq 0 \quad \wedge \quad a+2 \neq 0$$
$$\boxed{a \neq 2} \quad \wedge \quad \boxed{a \neq -2}$$

Дакле, разломак $\frac{a+3}{a^2-4}$ је дефинисан за $\forall a \neq \pm 2$.

(1) ***Проширивање разломака:***

Вредност тазломка се не мења ако се његов бројилац и именилац помноже истим бројем или изразом који је различит од нуле тј.

$$\frac{A}{B}=\frac{A\cdot C}{B\cdot C} \quad (B\neq 0 \wedge C\neq 0)$$

Проширити разломак *значи помножити његов бројилац и именилац истим бројем или изразом који је различит од нуле.*

Пример:

Проширити разломак $\frac{x^2-5x}{x+1}$ са $(3x^2-1)$.

Решење:

$$\frac{x^2-5x}{x+1}=\frac{(x^2-5x)(3x^2-1)}{(x+1)(3x^2-1)}$$

(2) ***Скраћивање разломака***

Вредност разломка се не мења ако се ако се његов бројилац и именилац поделе истим бројем или изразом који је различит од нуле тј.

$$\frac{A}{B}=\frac{A:C}{B:C} \quad (B\neq 0 \wedge C\neq 0)$$

Скратити разломак *значи поделити његов бројилац и менилац истим бројем или изразом који је различит од нуле.*

Напомена:

За разлику од проширивања разломка, где се разломак може проширити било којим изразом (који је различит од нуле) код скраћивања разломка то није случај, наиме разломак се може "скратити" само оним изразом са којим су дељиви и његов бројилац и његов именилац, тј. разломак се може "скратити" само изразом који је заједнички делилац за његов бројилац и именилац.

Пошто се разломак скраћује са ***НЗД*** за његов бројилац и именилац то значи да се скраћивање разломка практично своди на то да се *бројилац и иманилац разломка раставе на просте чиниоце* и да се *"прецртају"* исти чиниоци у бројиоцу и имениоцу.

<u>Пример 1</u>:

Скратити разломак: $\frac{a^2-2a-2x+ax}{a^3-8}$.

<u>Решење</u>:

Прво треба <u>*раставити на просте чиниоце*</u> бројилац и именилац датог разломка.

$$\boxed{\frac{a^2-2a-2x+ax}{a^3-8}}=\frac{a(a-2)+x(a-2)}{(a-2)(a^2+2x+4)}=\frac{\cancel{(a-2)}(a+x)}{\cancel{(a-2)}(a^2+2x+4)}=\boxed{\frac{a+x}{a^2+2x+4}}$$

Дакле:

$$\boxed{\frac{a^2-2a-2x+ax}{a^3-8}=\frac{a+x}{a^2+2x+4}}$$

<u>Пример 2</u>:

Скратити разломак: $\frac{x^3y^3-x^5y^3}{x^3y^3(1-xy)^2-x^3y^3(x-y)^2}$.

<u>Решење</u>:

$$\boxed{\frac{x^3y^3-x^5y^3}{x^3y^3(1-xy)^2-x^3y^3(x-y)^2}}=\frac{x^3y^3(1-x^2)}{x^3y^3\left[(1-xy)^2-(x-y)^2\right]}=$$

$$=\frac{x^3y^3(1-x)(1+x)}{x^3y^3\left[(1-xy)-(x-y)\right]\cdot\left[(1-xy)+(x-y)\right]}=\frac{x^3y^3(1-x)(1+x)}{x^3y^3(1-xy-x+y)(1-xy+x-y)}=$$

$$=\frac{x^3y^3(1-x)(1+x)}{x^3y^3\left(\underbrace{1-x}-\underbrace{xy+y}\right)\left(\underbrace{1+x}-\underbrace{xy-y}\right)}=\frac{x^3y^3(1-x)(1+x)}{x^3y^3\left((1-x)-y(1-x)\right)\left((1+x)-y(1+x)\right)}=$$

$$=\frac{x^3y^3(1-x)(1+x)}{x^3y^3(1-x)(1-y)(1+x)(1-y)}=\frac{\cancel{x^3}\,\cancel{y^3}\,\cancel{(1-x)}\,\cancel{(1+x)}}{\cancel{x^3}\,\cancel{y^3}\,\cancel{(1-x)}\,\cancel{(1+x)}\,(1-y)^2}=\boxed{\frac{1}{(1-y)^2}}$$

Дакле: $\boxed{\frac{x^3y^3-x^5y^3}{x^3y^3(1-xy)^2-x^3y^3(x-y)^2}=\frac{1}{(1-y)^2}}$

(3) Множење разломака:

Два алгебарска рауломка се множе тако што се помножи бројилац са бројиоцем а именилац са имениоцем, тј.

$$\boxed{\frac{A}{B}\cdot\frac{C}{D}=\frac{A\cdot C}{B\cdot D}}$$

Међутим, код множења алгебарских разломака од велике је користи могућност *скраћивања* пре самог множења. Наиме, пре множења можемо скратити било који бројилац и било који именилац, уколико имају заједнички делилац. Покажимо то на примеру.

Пример 1:

Израчунати:

$$\frac{x^3-27}{x^2-6x+9}\cdot\frac{9-3x}{2x^2+6x+18}$$

Решење:

Напомена:
Пре него што извршимо множење треба скратити разломке , ако је то могуће. Да бисмо то учинили, прво треба раставити на просте чиниоце све бројиоце и све мениоце:

$$\boxed{\frac{x^3-27}{x^2-6x+9}\cdot\frac{9-3x}{2x^2+6x+18}}=\frac{\cancel{(x-3)}\cancel{\left(x^2+3x+9\right)}}{\cancel{(x-3)^2}}\cdot\frac{-3\cancel{(x-3)}}{2\cancel{\left(x^2+3x+9\right)}}=\frac{1\cdot1}{1}\cdot\frac{-3\cdot1}{2\cdot1}=\boxed{-\frac{3}{2}}$$

Пример 2:

Израчунати:

$$\frac{a^2-ab}{a^2+ab}\cdot\frac{a^2b+ab^2}{ab}$$

Решење:

$$\boxed{\frac{a^2-ab}{a^2+ab}\cdot\frac{a^2b+ab^2}{ab}}=\frac{\cancel{a}(a-b)}{\cancel{a}\cancel{(a+b)}}\cdot\frac{\cancel{ab}\cancel{(a+b)}}{\cancel{ab}}=\frac{1\cdot(a-b)}{1\cdot1}\cdot\frac{1\cdot1}{1}=\frac{a-b}{1}=\boxed{a-b}$$

Пример 3:

Израчунати:

$$\frac{x^4-1}{a^3+a}\cdot\frac{a}{x^3+x^2+x+1}\cdot\frac{2a^2+2}{(x-1)^2}$$

Решење:

$$\boxed{\frac{x^4-1}{a^3+a}\cdot\frac{a}{x^3+x^2+x+1}\cdot\frac{2a^2+2}{(x-1)^2}}=\frac{(x-1)(x+1)(x^2+1)}{a(a^2+1)}\cdot\frac{a}{x^2(x+1)+1\cdot(x+1)}\cdot\frac{2(a^2+1)}{(x-1)^2}=$$

$$=\frac{\cancel{(x-1)}\cancel{(x+1)}\cancel{(x^2+1)}}{\cancel{a}\cancel{(a^2+1)}}\cdot\frac{\cancel{a}}{\cancel{(x+1)}\cancel{(x^2+1)}}\cdot\frac{2\cancel{(a^2+1)}}{(x-1)^{\cancel{2}}}=$$

$$=\frac{1\cdot1\cdot1}{1\cdot1}\cdot\frac{1}{1\cdot1}\cdot\frac{2\cdot1}{(x-1)}=\boxed{\frac{2}{x-1}}$$

(4) Дељење разломака:

Два алгебарска разломка се деле тако што се подели бројилац са бројиоцем и именилац са имениоцем, ако су они дељиви. Уколико они нису дељиви, онда се дељење преводи у реципрочно множење. У пракси се дељење готову увек преводи у реципрочно множење.

Пример 1:

Израчунати:

$$\frac{4x^2y^2}{15b^3c}:\frac{8x^3y^3}{5c^2b^2}$$

Решење:

$$\boxed{\frac{4x^2y^2}{15b^3c}:\frac{8x^3y^3}{5c^2b^2}}=\frac{4x^2y^2}{15b^3c}\cdot\frac{5c^2b^2}{8x^3y^3}=\frac{\cancel{4}\,\cancel{x^2}\,\cancel{y^2}}{\cancel{15}b^{\cancel{3}}\,\cancel{c}}\cdot\frac{\cancel{5}c^{\cancel{2}}\,\cancel{b^2}}{\cancel{8}x^{\cancel{3}}y^{\cancel{3}}}=\frac{1\cdot1\cdot1}{3\cdot b\cdot1}\cdot\frac{1\cdot c\cdot1}{2\cdot x\cdot y}=\boxed{\frac{c}{6bxy}}$$

<u>Пример 2</u>:

Израчунати:

$$\frac{x^2-25}{x^2-3x}:\frac{x^2+5x}{x^2-9}$$

<u>Решење</u>:

$$\boxed{\frac{x^2-25}{x^2-3x}:\frac{x^2+5x}{x^2-9}}=\frac{x^2-25}{x^2-3x}\cdot\frac{x^2-9}{x^2+5x}=\frac{(x-5)\cancel{(x+5)}}{x\cancel{(x-3)}}\cdot\frac{\cancel{(x-3)}(x+3)}{x\cancel{(x+5)}}=$$

$$=\frac{x-5}{x}\cdot\frac{x+3}{x}=\boxed{\frac{(x-5)(x+3)}{x^2}}$$

<u>Пример 3</u>:

Израчунати:

$$\frac{b^2-y^2}{3a^3-3y^3}:\frac{b-y}{a^2+ay+y^2}$$

<u>Решење</u>:

$$\boxed{\frac{b^2-y^2}{3a^3-3y^3}:\frac{b-y}{a^2+ay+y^2}}=\frac{b^2-y^2}{3a^3-3y^3}\cdot\frac{a^2+ay+y^2}{b-y}=\frac{(b-y)(b+y)}{3(a^3-y^3)}\cdot\frac{a^2+ay+y^2}{b-y}=$$

$$=\frac{\cancel{(b-y)}(b+y)}{3(a-y)\cancel{(a^2+ay+y^2)}}\cdot\frac{\cancel{a^2+ay+y^2}}{\cancel{b-y}}=\boxed{\frac{b+y}{3(a-y)}}$$

<u>Пример 4</u>:

Израчунати:

$$\frac{a^2+b^2}{1+2m+m^2}:\frac{a^4-b^4}{1-2m^2+m^4}$$

<u>Решење</u>:

$$\boxed{\frac{a^2+b^2}{1+2m+m^2}:\frac{a^4-b^4}{1-2m^2+m^4}}=\frac{a^2+b^2}{1+2m+m^2}\cdot\frac{1-2m^2+m^4}{a^4-b^4}=\frac{a^2+b^2}{(1+m)^2}\cdot\frac{(1-m^2)^2}{(a^2-b^2)(a^2+b^2)}=$$

$$=\frac{\cancel{a^2+b^2}}{\cancel{(1+m)^2}}\cdot\frac{(1-m)^2\cancel{(1+m)^2}}{(a^2-b^2)\cancel{(a^2+b^2)}}=\boxed{\frac{(1-m)^2}{a^2-b^2}}$$

(5) ***Сабирање (одузимање) разломака:***

Као и код "обичних" разломака, алгебарски разломци се могу сабирати само ако имају једнаке имениоце. Уколико разломци немају једнаке имениоце, они се могу <u>довести на једнаке имениоце</u>, односно <u>довести на заједнички именилац</u> проширивањем одговарајућим изразом.

<u>Пример 1</u>:
Израчунати:

$$\frac{a^2+ab+b^2}{a+b}+\frac{a^2-ab+b^2}{a-b}-\frac{2a^2b}{a^2-b^2}$$

<u>Решење</u>:
Да бисмо могли сабрати дате разломке, морамо прво све разломке довести на <u>једнаке имениоце</u>, односно на <u>заједнички именилац</u>. Тај заједнички именилац је НЗС за све имениоце, а да се он одреди потребно је све имениоце ***раставити на просте чиниоце***.

$$\boxed{\frac{a^2+ab+b^2}{a+b}+\frac{a^2-ab+b^2}{a-b}-\frac{2a^2b}{a^2-b^2}}=\frac{a^2+ab+b^2}{a+b}+\frac{a^2-ab+b^2}{a-b}-\frac{2a^2b}{(a-b)(a+b)}=$$

НЗС за изразе: $\boxed{a+b}$, $\boxed{a-b}$ *и* $\boxed{(a-b)(a+b)}$ *је* $\boxed{(a-b)(a+b)}$, *тј. <u>заједнички именилац</u> за дате разломке је:* $\boxed{(a-b)(a+b)}$. *Дакле, дате разломке треба <u>проширити</u> одговарајућим изразима тако да сви они имају именилац* $\boxed{(a-b)(a+b)}$. *Тако добијамо:*

$$=\frac{(a-b)(a^2+ab+b^2)}{(a-b)(a+b)}+\frac{(a+b)(a^2-ab+b^2)}{(a+b)(a-b)}-\frac{2a^2b}{(a-b)(a+b)}=$$

<u>Напомена</u>:
Треба напоменути, да ми у пракси кад сабирамо разломке не записујемо на овај начин. То јест, ми дате разломке <u>доводимо на заједнички именилац</u> (размишљајући као у претходном излагању) и пишемо:

$$=\frac{(a-b)(a^2+ab+b^2)+(a+b)(a^2-ab+b^2)-2a^2b}{(a-b)(a+b)}=$$

$$=\frac{a^3\cancel{-b^3}+a^3\cancel{+b^3}-2a^2b}{(a-b)(a+b)}=\frac{2a^3-2a^2b}{(a-b)(a+b)}=\frac{2a^2\cancel{(a-b)}}{\cancel{(a-b)}(a+b)}=\boxed{\frac{2a^2}{a+b}}$$

<u>Пример 2</u>:

Упростити израз:

$$\frac{a+1}{a^2}-\frac{2}{a^2-a}+\frac{2}{a^3-a^2}$$

<u>Решење</u>:

$$\boxed{\frac{a+1}{a^2}-\frac{2}{a^2-a}+\frac{2}{a^3-a^2}}=\frac{a+1}{a^2}-\frac{2}{a(a-1)}+\frac{2}{a^2(a-1)}=$$

$$=\frac{(a-1)(a+1)-2a+2}{a^2(a-1)}=\frac{a^2-1-2a+2}{a^2(a-1)}=$$

$$=\frac{a^2-2a+1}{a^2(a-1)}=\frac{(a-1)^{\cancel{2}}}{a^2\cancel{(a-1)}}=\boxed{\frac{a-1}{a^2}}$$

<u>Пример 3</u>:

Упростити израз:

$$\frac{30x^2}{9x^3-x}+\frac{8}{6x-2}-\frac{15x+5}{9x^2+6x+1}$$

<u>Решење</u>:

Овај пример је занимљив по томе што дате разломке треба прво <u>скратити</u> па тек онда сабирати. Ако се то не уради онда се добијају „компликовани“ изрази који нас, ако нигде не погрешимо, прилично „намуче“ док дођемо до крајњег резултата.

$$\boxed{\frac{30x^2}{9x^3-x}+\frac{8}{6x-2}-\frac{15x+5}{9x^2+6x+1}}=\frac{30x^2}{x(9x^2-1)}+\frac{8}{2(3x-1)}-\frac{5(3x+1)}{(3x+1)^2}=$$

$$=\frac{30x^{\cancel{2}}}{\cancel{x}(3x-1)(3x+1)}+\frac{\cancel{2}\cdot 4}{\cancel{2}(3x-1)}-\frac{5\cancel{(3x+1)}}{(3x+1)^{\cancel{2}}}=$$

$$=\frac{30x}{(3x-1)(3x+1)}+\frac{4}{3x-1}-\frac{5}{3x+1}=$$

$$=\frac{30x+4(3x+1)-5(3x-1)}{(3x-1)(3x+1)}=\frac{30x+12x+4-15x+5}{(3x-1)(3x+1)}=$$

$$=\frac{27x+9}{(3x-1)(3x+1)}=\frac{9\cancel{(3x+1)}}{(3x-1)\cancel{(3x+1)}}=\boxed{\frac{9}{3x-1}}$$

<u>Пример 4</u>:

Упростити израз:

$$\left(\frac{x}{x^2y+y^3}-\frac{2x^2}{y^3-xy^2+x^2y-x^3}\right)\cdot\left(1-\frac{y-1}{x}-\frac{y}{x^2}\right)$$

<u>Решење</u>:

$$\boxed{\left(\frac{x^2-xy}{x^2y+y^3}-\frac{2x^2}{y^3-xy^2+x^2y-x^3}\right)\cdot\left(1-\frac{y-1}{x}-\frac{y}{x^2}\right)}=$$

$$=\left(\frac{x^2-xy}{y\left(x^2+y^2\right)}-\frac{2x^2}{y^2\left(y-x\right)+x^2\left(y-x\right)}\right)\cdot\frac{x^2-x\left(y-1\right)-y}{x^2}=$$

$$=\left(\frac{x^2-xy}{y\left(x^2+y^2\right)}-\frac{2x^2}{\left(y-x\right)\left(x^2+y^2\right)}\right)\cdot\frac{x^2-xy+x-y}{x^2}=$$

$$=\left(\frac{x^2-xy}{y\left(x^2+y^2\right)}-\frac{2x^2}{-\left(x-y\right)\left(x^2+y^2\right)}\right)\cdot\frac{x\left(x-y\right)+1\cdot\left(x-y\right)}{x^2}=$$

$$=\frac{\left(x^2-xy\right)\left(x-y\right)+2x^2y}{y\cancel{\left(x-y\right)}\left(x^2+y^2\right)}\cdot\frac{\cancel{\left(x-y\right)}\left(x+1\right)}{x^2}=$$

$$=\frac{x^3\cancel{-x^2y}\cancel{-x^2y}+xy^2\cancel{+2x^2y}}{y\left(x^2+y^2\right)}\cdot\frac{x+1}{x^2}=$$

$$=\frac{x^3+xy^2}{y\left(x^2+y^2\right)}\cdot\frac{x+1}{x^2}=\frac{\cancel{x}\cancel{\left(x^2+y^2\right)}}{y\cancel{\left(x^2+y^2\right)}}\cdot\frac{x+1}{x^{\cancel{2}}}=\boxed{\frac{x+1}{xy}}$$

__**Пример 5**__:

Упростити израз:

$$\frac{\frac{2a+b}{2a-b}-\frac{2a-b}{2a+b}}{\frac{4a^2+b^2}{4a^2-b^2}-\frac{4a^2-b^2}{4a^2+b^2}}$$

__Решење__:

У овом изразу имамо __двојни разломак__. Овај двојни разломак се може превести у __дељење__ израза $\left(\frac{2a+b}{2a-b}-\frac{2a-b}{2a+b}\right)$ *са изразом* $\left(\frac{4a^2+b^2}{4a^2-b^2}-\frac{4a^2-b^2}{4a^2+b^2}\right)$.

$$\frac{\frac{2a+b}{2a-b}-\frac{2a-b}{2a+b}}{\frac{4a^2+b^2}{4a^2-b^2}-\frac{4a^2-b^2}{4a^2+b^2}}=\left(\frac{2a+b}{2a-b}-\frac{2a-b}{2a+b}\right):\left(\frac{4a^2+b^2}{4a^2-b^2}-\frac{4a^2-b^2}{4a^2+b^2}\right)=$$

$$=\frac{(2a+b)^2-(2a-b)^2}{(2a-b)(2a+b)}:\frac{(4a^2+b^2)^2-(4a^2-b^2)^2}{(4a^2-b^2)(4a^2+b^2)}=$$

$$=\frac{4a^2+4ab+b^2-(4a^2-4ab+b^2)}{\cancel{4a^2-b^2}}\cdot\frac{\cancel{(4a^2-b^2)}(4a^2+b^2)}{(4a^2+b^2)^2-(4a^2-b^2)^2}=$$

$$=\frac{\cancel{4a^2}+4ab+\cancel{b^2}-\cancel{4a^2}+4ab-\cancel{b^2}}{1}\cdot\frac{4a^2+b^2}{\left[(4a^2+b^2)-(4a^2-b^2)\right]\cdot\left[(4a^2+b^2)+(4a^2-b^2)\right]}=$$

$$=\frac{8ab}{1}\cdot\frac{4a^2+b^2}{\left(\cancel{4a^2}+b^2\cancel{-4a^2}+b^2\right)\left(4a^2\cancel{+b^2}+4a^2\cancel{-b^2}\right)}=$$

$$=\frac{\cancel{8}\,\cancel{a}\,\cancel{b}}{1}\cdot\frac{4a^2+b^2}{2b^{\cancel{2}}\cdot\cancel{8}a^{\cancel{2}}}=\boxed{\frac{4a^2+b^2}{2ab}}$$